

### ملخص درس النهايات

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0^-$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = +\infty$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^-} -2x + 6 = 0^+$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{-2x+6} = -\infty$

### III العمليات على النهايات

في كل ما يلي  $a$  عدد حقيقي أو يساوي  $+\infty$  أو  $-\infty$  و  $l$  و  $l'$  عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

#### (1) النهاية و الجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

**مثال:** أحسب النهايات التالية :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

**الجواب:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 7 = 7$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  ومنه:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

#### (2) النهاية و الضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\frac{-\infty}{0}$ $\frac{0}{+\infty}$	$0$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$	$l'l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

#### (3) النهاية و المقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	$0$	$0$	$+\infty$	$-\infty$

#### (4) النهاية و الخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\neq 0$	$\infty$	$0$	$0$	$0^+$	$0^+$	$0^-$	$0^-$	$< 0$	$-\infty$ $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

#### (5) نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي نهاية حدها الأكبر درجة

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4$

**الجواب:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

#### (6) نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$

**الجواب:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$

### I نهايات اعتيادية:

$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  •

$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$  •

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \forall n \in \mathbb{N}^*$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  •

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  إذا كان  $n$  زوجي •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = -\infty$  إذا كان  $n$  فردي

$\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$  •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$  •

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$  •

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  وتقرأ النهاية عندما يؤول  $x$  إلى  $0$  على اليمين

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  وتقرأ النهاية عندما يؤول  $x$  إلى  $0$  على اليسار

**خاصية:** لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  عددا حقيقيا

إذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $+\infty$  (أو في  $-\infty$ ) فان هذه النهاية وحيدة.

### II النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

**نهايات اعتيادية:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$  •

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  •  $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

إذا كان  $n$  زوجي غير منعدم, فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

إذا كان  $n$  فردي غير منعدم, فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

**مثال:** أحسب النهايات التالية: (1)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6}$

**أجوبة:** (1)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 = 9 + 1 = 10$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$2x-6$	$-$	$0$	$+$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 6 = 0^-$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = -1$  (2)

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	$0$	$-$