

2. نهايات دالة عند عدد:

تعريف 1:

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى العدد a فإننا نكتب
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

تعريف 2:

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى a من جهة اليمين فإننا نكتب
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ أو $\lim_{x > a} f(x) = l$

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد l عندما يؤول x إلى a من جهة اليسار فإننا نكتب
 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ أو $\lim_{x < a} f(x) = l$

اصطلاحات يجب احترامها أثناء حساب نهاية دالة عند عدد:

إذا كان k موجبا:

✓ $\frac{k}{0^+} = +\infty$
✓ $\frac{k}{0^-} = -\infty$

إذا كان k سالبا:

✓ $\frac{k}{0^+} = -\infty$
✓ $\frac{k}{0^-} = +\infty$

ملحوظة: العملية $\frac{0}{0}$ هي شكلا غير محدد

قاعدة الحساب:

لحساب نهاية دالة عددية عند العدد a يكفي فقط تعويض x بالقيمة a ونحسب النتيجة مع احترام الاصطلاحات السابقة:

مثال:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2-2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $x < 1$

تطبيقات:

احسب النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2x-4}$; $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{4x-12}$; $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+3}{x-5}$
 $x > 2$ $x < 3$ $x < 5$
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-7}{8-2x}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-6}{1-x}$

1. نهايات دالة عند $+\infty$ و $-\infty$:

صفة عامة:

لتكن f دالة عددية. إذا كانت $f(x)$ تأخذ قيما موجبة وكبيرة جدا عندما يأخذ x قيما موجبة وكبيرة جدا فإننا نقول أن $f(x)$ تؤول إلى زائد ما لانهاية عندما يؤول x إلى زائد ما لا نهاية و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. بنفس الطريقة نعرف $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ حيث $l \in \mathbb{R}$.

قواعد الحساب على $+\infty$ و $-\infty$:

نقبل الاصطلاحات التالية كوسائل مساعدة على حساب نهايات الدوال:

إذا كان موجبا:	✓ $(+\infty)^n = +\infty$
✓ $k \times (+\infty) = +\infty$	✓ $(-\infty)^n = \begin{cases} -\infty & \text{فردى } n \\ +\infty & \text{زوجى } n \end{cases}$
✓ $k \times (-\infty) = -\infty$	✓ $\frac{k}{\pm\infty} = 0$
إذا كان سالبا:	
✓ $k \times (+\infty) = -\infty$	
✓ $k \times (-\infty) = +\infty$	

ملحوظة: العملية $\frac{\infty}{\infty}$ تسمى شكلا غير محدد بمعنى أنه لا يمكن حسابها مباشرة. ولكن يمكن حسابها بعد اجراء عمليات تبسيط كالاختزال.

قاعدة الحساب:

لحساب نهاية دالة عند $+\infty$ يكفي ان نعوض x بالقيمة $+\infty$ ونحسب النتيجة باحترام القواعد السابقة.

أمثلة:

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 = 5(-\infty)^4 = 5 \times (+\infty) = +\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^4 = -7 \times (-\infty)^4 = -7 \times (+\infty) = -\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^5 = -7(-\infty)^5 = -7 \times (-\infty) = +\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \frac{(+\infty)^4}{(+\infty)^3} = \frac{+\infty}{+\infty}$
وهو شكل غير محدد. لذلك سنحاول تبسيط الدالة:
✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(-\infty)^3} = \frac{1}{-\infty} = 0$

تطبيقات:

احسب النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + \frac{7}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^7$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2}$

خاصة (نهاية الدوال الحدودية و الدوال الحذرية):

لتكن P دالة حدودية درجتها n حيث

$P(x) = ax^n + \dots + bx^2 + cx^1 + d$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$

لتكن Q دالة حدودية درجتها m حيث

$Q(x) = ax^m + \dots + \beta x^2 + \gamma x^1 + \delta$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{ax^m}$

أمثلة:

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -3(-\infty)^2 = -(+\infty) = -\infty$
✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+5x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = -(-\infty) = +\infty$

تطبيق:

احسب النهايات التالية:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^6 + 5x^3 + x - 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3x$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-x+7}{2-x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^5+5}{x^3+4}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-x+1}{-x^3+x-6}$

