اشتقاق دالة

المستوى: أولى باك آداب
ذ. محمد صلاح الدين عروش

تمهيد : لتحديد رتابة الدالة f نستعمل دالة تسمى الدالة المشتقة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'

I. تحديد الدالة المشتقة لدالة عددية:

1. الدالة الحدودية:

قاعدة:

لتكن f دالة عددية و k عدد حقيقي معلوم.

إذا كانت $f(x)=k$ فإن $f'(x)=0$

إذا كان $f(x)=kx$ فإن $f'(x)=k$

إذا كان $f(x)=kx^n$ فإن $f'(x)=knx^{n-1}$

أمثلة:

إذا كانت $f(x)=-2$ فإن $f'(x)=0$

إذا كانت $f(x)=4x$ فإن $f'(x)=4$

إذا كانت $f(x)=5x^3$ فإن $f'(x)=5\times 3x^2=15x^2$

إذا كانت $f(x)=x^3-4x^2+x+1$

فإن $f'^{(x)}=3x^2-4\times 2x^1+1+0$

$=3x^2-8x+1$

تمرين تطبيقي:

احسب الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية

$f(x)=2x^3-3x^2+4x-2.$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1.$

$f(x)=2x^2+3x+1.$

2. الدالة الجذرية :

قاعدة: لتكن g و h دالتان حيث $g(x)\neq 0$ لكل x من D_g

$$\left(\frac{h}{g}\right)'=\frac{h'\times g-h\times g'}{g^2}$$

مثال:

$\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)'=\frac{(2x-1)'(3x+4)-(2x-1)(3x+4)'}{(3x+4)^2}.$

$=\frac{2(3x+4)-(2x-1)3}{(3x+4)^2}=\frac{6x+8-6x+3}{(3x+4)^2}.$

$=\frac{11}{(3x+4)^2}$.

تمرين تطبيقي:

احسب الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية:

$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$; $f(x)=\frac{7}{x+2}$;

$f(x)=\frac{5x-3}{2x+2}.$.

II. تطبيقات:

1. رتابة دالة:

قاعدة:

إذا كان $f'(x)\geq 0$ لكل x من مجال I فإن f تزايدية على I

إذا كان $f'(x)\leq 0$ لكل x من مجال I فإن f تناقصية على I .

مثال1:

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2-2x+1$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. احسب $f'(x)$. واستنتج جدول تغيرات الدالة f .

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$.

2. لدينا $f'(x)=2x-2=2(x-1)$

x	-∞	1	+∞
إشارة $f'(x)$	-	0	+
رتابة f	+∞ ↘	$f(1)$	↗ +∞

مثال2:

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^2-6x$

نفس أسئلة المثال السابق.

مثال3:

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+1$

نفس أسئلة المثال السابق.

مثال4:

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=2x^3-6x$

نفس أسئلة المثال السابق.

مثال5:

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=x^3+x$

نفس أسئلة المثال السابق.

مثال6:

نعتبر الدالة f حيث $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

1. حدد مجموعة تعريف f .

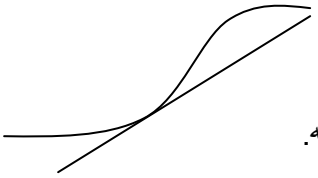
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$

3. احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

مثال7: نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للحالة: $f(x)=\frac{x+4}{x+3}$

مثال8: نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للحالة: $f(x)=\frac{1}{x-2}$

2. معادلة مماس منحنى دالة:



تعريف:

مماس منحنى في نقطة هو مستقيم يقطع المنحنى في هذه النقطة و لا يخترقه.

قاعدة:

معادلة مماس المنحنى C_f في النقطة التي أفصولها a هي

$y=f'(a)(x-a)+f(a).$

مثال:

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=x^2+2x-1$.

لنحدد معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها 1

لدينا $f(1)=2$

ولدينا $f'(x)=2x+2$ إذن $f'(1)=4$

معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها 1 هي

$y=f'(a)(x-a)+f(a).$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

$y=4(x-1)+2.$

$y=4x-2.$

تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة f حيث $(x)=x^3-x^2+2$

1. حدد معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها 0.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها1